

Analyse dynamique non linéaire du signal stabilométrique

Pierre-Marie GAGEY

C'est une analyse, parmi d'autres...

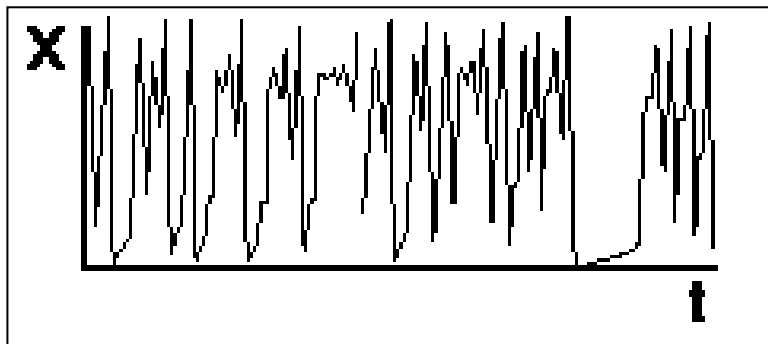
Que fait-elle ?

Est-elle adaptée à ce signal stabilométrique?

Est-elle redondante ? A-t'elle un réel intérêt ?

Que fait-elle ?

Que faire en présence d'un signal pour l'analyse duquel les opérateurs mathématiques ordinaires ne fonctionnent pas (addition, soustraction, multiplication, division)?



Henri Poincaré (1854/1912) a proposé un nouvel opérateur logique, la topologie, qui observe comment le signal s'organise dans un espace qui tient compte de sa dynamique, c'est à dire de la succession de ses événements. Un tel espace est nommé : «espace des phases».

Cette organisation spatiale se manifeste par des rapports de proximité plus ou moins forts selon les lieux, qui construisent des figures dont on apprécie la similitude, soit entre deux signaux, soit entre un signal et la prédiction qu'on en a fait.

Les catégories fondamentales de la topologie sont donc :

- la proximité,
- la similitude,
- la prédictibilité.

L'espace des phases (*Phase space in English*)

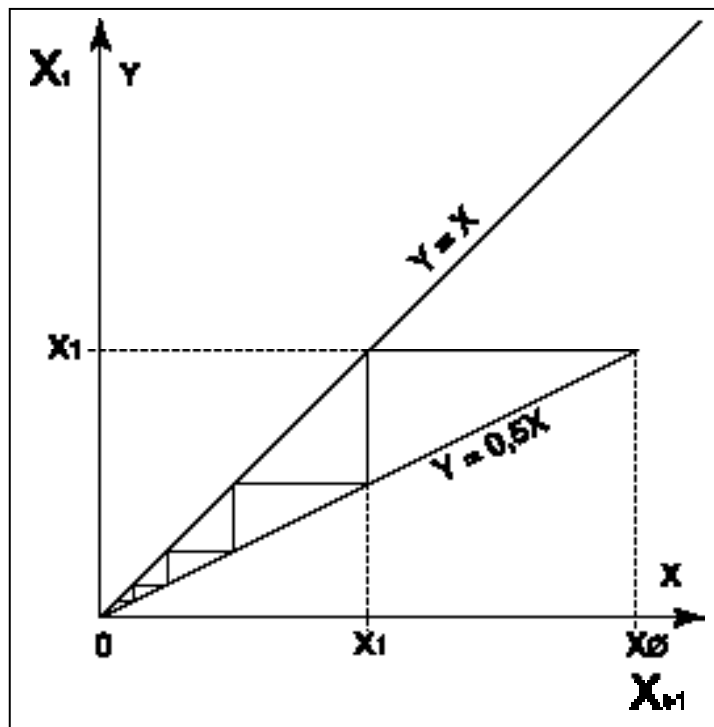
Une fonction quelconque, $y=f(x)$, peut être représentée dans un espace cartésien, doté d'un repère orthonormé où les valeurs de X figurent en abscisses et les valeurs de Y en ordonnées.

Mais on peut aussi s'intéresser à la représentation de l'enchaînement temporel de la série des coordonnées déterminées par la même fonction, qui s'écrit alors : $X_{[t]}=f(X_{[t-1]})$, c'est à dire représenter la série des valeurs:

$$X_0, X_1, \dots, X_i, X_{i+1}, \dots$$

Cette représentation peut utiliser le même repère orthonormé que l'espace cartésien.

Construisons par exemple la représentation topologique dans l'espace des phases de l'enchaînement de la série des valeurs successives déterminées par la fonction $Y=0,5X$ (Figure 1)



Sur le même schéma sont superposés l'espace cartésien avec son repère orthonormé $OxOy$ et l'espace des phases avec son repère $Ox_{[t-1]}Ox_{[t]}$

L'orientation temporelle de cet espace est déterminée par le choix de l'axe des abscisses pour les $X_{[t-1]}$ par rapport aux $X_{[t]}$ portés en ordonnées.

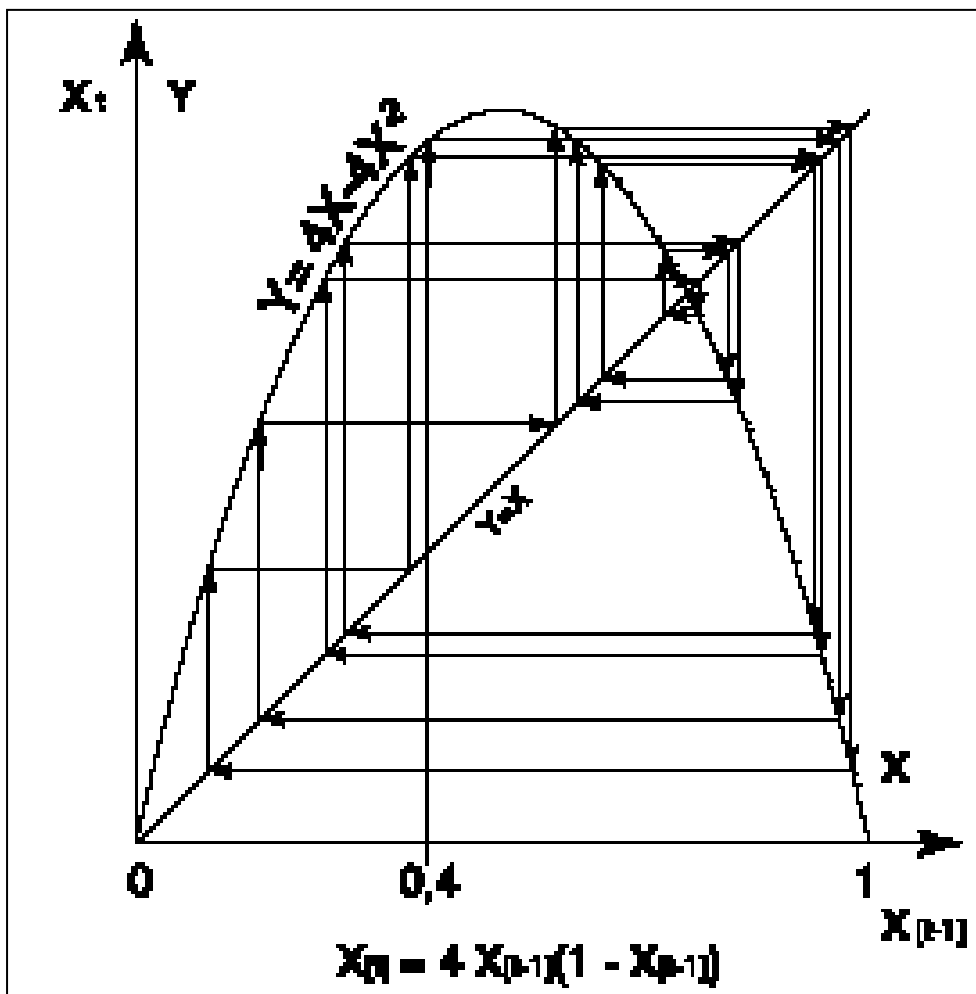
A partir d'une valeur arbitraire choisie pour origine de la série temporelle, X_0 , on détermine X_1 qui est l'ordonnée du point de la droite $Y=0,5X$ d'abscisses X_0 . Cette valeur de X_1 est alors reportée sur l'axe des X_{t-1} c'est l'abscisse du point de la droite $X=Y$ d'ordonnée X_1 .

On constate que cette série est 'attirée' par le point O. La «proximité» des points de cette série devient de plus en plus forte au fur et à mesure qu'on se rapproche de O.

Si l'on construisait la représentation topologique dans l'espace des phases de la série des valeurs successives enchaînées déterminées par la fonction $Y=2X$, on constaterait qu'elle n'est pas attirée par le point O, mais qu'elle diverge vers l'infini.

L'attracteur dans l'espace des phases

Le lieu de l'espace des phases vers lequel est éventuellement attiré la série temporelle enchaînée des événements est appelé «attracteur».



On constate sur cette figure que la série des X_i déterminée par la fonction $Y=QX-QX^2$ pour $X_0=0,4$ et $Q=4$, tourne autour d'un point de l'espace des phases, en restant irrégulièrement à distance de lui.

L'attracteur de Lorenz est célèbre.