Ellipse de tolérance

Brieuc CONAN-GUEZ

21 mai 2010

1 Modélisation probabiliste du problème

On pose [1] $\mathbf{X}$ un vecteur aléatoire gaussien bivarié d'espérance $\mu = (\mu_1, \mu_2) = E(\mathbf{X})$ et de matrice de variance/covariance $\Sigma = E(\mathbf{X}_i - \mu)(\mathbf{X}_i - \mu)^T$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

On a donc $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$. Les paramètres μ et Σ sont supposés inconnus. On estime μ par l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE) :

$$\mathbf{G} = \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{X}_i}{n}$$

où les $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ sont des vecteurs gaussiens indépendants identiquement distribués.

De même, on estime la matrice Σ par l'estimateur du maximum de vraisemblance (estimateur biaisé) :

$$\mathbf{V} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} (\mathbf{X}_i - \mathbf{G})(\mathbf{X}_i - \mathbf{G})^T$$

2 Quelques propriétés

On pose $X = (x_1, x_2)$, on a alors les résultats suivants :

– la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$:

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)\right)$$

$$f(X) = \frac{1}{(2\pi)\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}]\}$$

– le carré de la distance de Mahalanobis suit la loi de Fisher [2] à 2 et $n-2$ degrés de liberté :

$$\frac{n(n-2)}{2(n-1)(n+1)}(\mathbf{X} - \mathbf{G})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{G}) \sim \mathcal{F}(2, n-2)$$

1. Dans ce document, les variables aléatoires sont notées en gras.
2. Voir le livre de Gilbert SAPORTA "Probabilités, analyse de données et statistique", deuxième édition, page 316, section 13.6.2

3 Ellipse de tolérance à 90%

En posant

$$r^2 = \frac{2(n-1)(n+1)}{n(n-2)} Q_{\mathcal{F}(2,n-2)}(0.9)$$

où $Q_{\mathcal{F}(2,n-2)}$ est la fonction quantile de la loi de Fisher, on obtient l'équation de l'ellipse de tolérance à 90% :

$$(X-G)^T V^{-1}(X-G) = r^2$$

On effectue la diagonalisation de la matrice V. On a $V = PDP^{-1}$. D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres λ_1 et λ_2. λ_1 est l'inertie expliquée par le grand axe (variance du grand axe), et λ_2 est l'inertie expliquée par le petit axe (variance du petit axe). Et P est la matrice de changement de base. La matrice P est orthogonale ($P^{-1} = P^T$). On a alors $V^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^T$. D'où

$$(X-G)^T V^{-1}(X-G) = (X-G)^T PD^{-1}P^T(X-G) = (P^T(X-G))^T D^{-1}(P^T(X-G))$$

On pose alors $Y = P^T(X-G)$ et on obtient :

$$Y^T D^{-1} Y = r^2$$

i.e. pour $Y = (y_1, y_2)$

$$\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} = r^2$$

Si $y_2 = 0$ alors $y_1 = \pm\sqrt{r^2\lambda_1}$. Et de même, $y_2 = \pm\sqrt{r^2\lambda_2}$

4 Application

Pour $n = 40{*}60 = 2400$, on obtient : $y_1 = \pm\sqrt{4.613 * \lambda_1}$. Pour $y_1 = 0$, on a $y_2 = \pm\sqrt{4.613 * \lambda_2}$

Le rayon de chaque axe est donc donné par 2.14 fois l'écart-type ($\sqrt{\lambda_1}$ ou $\sqrt{\lambda_2}$) de la projection sur l'axe.