

## Propriétés statiques d'un pendule inversé

I) Modélisation par ressort linéaire à déformation spirale (modèle mathématique)

a) Conventions (Fig. 1) : Une masse  $M$  est suspendue à une tige rigide de longueur  $l$  articulée à la base. Un ressort spirale de raideur  $K$ , enroulé à la base s'oppose à la chute de  $M$ . Un tel système dynamique est régi par l'équation :  $Mgl \sin \alpha - K\alpha = I\ddot{\alpha}$  (1)

Avec  $I$  : moment d'inertie,  $\ddot{\alpha}$  accélération angulaire. A l'équilibre on a :

$$Mgl \sin \alpha - K\alpha = 0 \quad (2) \Rightarrow Mgl \sin \alpha = K\alpha$$

Toute déviation de  $\alpha$  par rapport à la verticale provoque un couple de chute de moment :  $Mgl \cdot \sin \alpha$ . Le ressort développe un couple antagoniste linéaire :  $K\alpha$ . La caractéristique du couple en fonction de  $\alpha$  du ressort présente une pente constante :  $K$ . La pente de la caractéristique couple gravitaire en fonction de  $\alpha$  varie en  $Mgl \cdot \cos \alpha$

b) Equilibre statique : (Fig. 2)

Pour  $\alpha = 0$  : les couples gravitaire et de rappel sont égaux et nuls. Le pendule est en équilibre et, cependant, potentiellement instable : une impulsion parasite tangentielle fait naître un angle  $\alpha$  différent de zéro. Deux conditions sont alors à considérer :

1) Le couple du ressort croît plus vite que le couple gravitaire ( $K\alpha > Mgl\alpha$ , avec  $\sin \alpha = \alpha$  pour  $\alpha$  petit). Le ressort développe un couple de rappel qui ramène le pendule à sa position initiale après oscillations amorties : La position zéro n'est stable que si la raideur  $K$  est supérieure à la raideur équivalente gravitaire  $Mgl$ .

2) Le couple du ressort croît moins vite que le couple gravitaire parce que  $K < Mgl$ . Le pendule s'incline par exemple à la position  $\alpha/P$ , où les couples sont égaux. A cause de la forme en sinus, la pente ( $Mgl \cdot \cos \alpha$ ) est maintenant plus petite que celle du ressort ( $K$ ) et une nouvelle situation similaire à la précédente s'établit à une position stable (couple de rappel = couple gravitaire ; pente du ressort > pente de la courbe gravitaire au point  $p$ ). Une impulsion positive tangentielle (charge) provoque un retour amorti (couple du ressort dominant) au point  $p$ . Une impulsion négative (délestage) fait naître un couple gravitaire dominant qui provoque un retour amorti au point  $p$ .

Ces manifestations traduisent les effets en fonction du temps d'un Feed-back négatif passif d'un système à masse-gravité-ressort dans l'air (facteur dissipatif d'amortissement) modélisé par une équation différentielle du second ordre.

Supposons maintenant que  $K' < K$  (ressort compliant) : le pendule s'incline jusqu'à la position  $p'$  ( $\alpha > \alpha'$ ). Ou que  $K'' > K$  (ressort plus rigide) : le pendule retourne à la position  $p''$  ( $\alpha'' < \alpha$ ). Toute variation de la raideur du ressort se traduit par une variation du couple ( $C' - C''$ ) et un déplacement angulaire ( $\alpha' - \alpha''$ )

### 3) Critiques du modèle

Il est légitime de considérer que pour de petits angles  $\alpha$ , la relation (2) se simplifie :  $Mgl\alpha - K\alpha = 0$  car  $\sin\alpha \approx \alpha$  ( $\alpha$  est de l'ordre de 0.01 rad)

$\Rightarrow Mgl = K$  pour  $\forall \alpha \neq 0$  cette condition est entièrement indépendante de l'angle  $\alpha$ , elle est donc vraie pour une infinité d'inclinaisons  $\alpha$ . En effet, si les droites  $Mgl\alpha$  et  $K\alpha$  sont confondues, leurs points d'intersection sont en nombre infini. Cette condition est aussi vraie pour le point particulier :  $\alpha = 0$  mais pour  $\forall Mgl \neq K$ . Dans ce cas, deux solutions sont alors à envisager

a)  $\alpha = 0$  et  $K < Mgl$  : ce point de fonctionnement est instable car tout écart de zéro se traduit par la chute de la masse (le moment de chute est supérieur au moment du ressort).

b)  $\alpha = 0$  et  $K > Mgl$  : ce point de fonctionnement est stable car tout écart à zéro se traduit par un rappel du ressort sur la position initiale après oscillations sinusoïdales amorties. L'amplitude de ces oscillations dépend de la valeur de l'écart angulaire  $\alpha_e$  (condition initiale). La fréquence est donnée par la résolution de l'équation différentielle sans amortissement (1) simplifiée pour les petits angles :  $Mgl\alpha - K\alpha = I\ddot{\alpha}$ . Cette solution est

de la forme :  $\alpha_e \sin \omega t$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{K - Mgl}{I}} = \sqrt{\frac{K_e}{I}}$  ;  $K_e = K - Mgl$  est une

raideur équivalente du pendule qui exprime bien le fait que la fréquence des oscillations est nulle pour  $K = Mgl$  et qu'elle croît avec la différence positive des moments.

Pour exprimer différemment ces notions de stabilité : on dit qu'un mouvement est stable au sens de Lyapunov, lorsque le point figuratif de l'état du système qui se trouve à un instant  $t$  en un point P de l'espace des phases repasse par ce point au bout d'un temps fini après s'en être éloigné arbitrairement. Une autre façon de formaliser ce concept (fig.3) fait appel à l'énergie potentielle : un point d'équilibre est stable s'il est situé à un minimum d'énergie potentielle (puit de potentiel). Le pendule inversé est un système dynamique caractérisé par une inertie qui lui confère une énergie cinétique et une élasticité représentée ici par  $1/K'$  capable d'emmagasiner de l'énergie potentielle. Si le système est conservatif, à tout instant du mouvement, la somme de ces deux énergies est constante de sorte qu'un échange entre les deux types d'énergie est nécessaire pour assurer cette constance. Si le système est dissipatif, le mouvement s'éteint sur une position stable caractérisé par un minimum d'énergie potentielle. Pour un

pendule inversé, il peut paraître paradoxal que le point stable soit caractérisé par la position la plus haute de la masse, là où son potentiel de chute est le plus élevé. En réalité il faut prendre en considération la différence des potentiels (d'élasticité et de chute). Si la dominante est élastique alors le pendule est en équilibre stable en « Haut », si la dominante est gravitaire, le pendule est en équilibre stable en « Bas ». La détermination du point d'équilibre est graphiquement donnée par le point d'intersection (point de fonctionnement P) des courbes des deux forces antagonistes en fonction de l'inclinaison  $\alpha$ . La précision de ce point de fonctionnement d'autant meilleure que l'angle de coupure se rapproche de  $90^\circ$ , elle est nulle pour un angle de  $0^\circ$  (point indéterminé). Le maintien précis en statique d'une inclinaison devra répondre à deux exigences : une coupure franche entre les deux courbes et une dérivée plus grande en ce point pour la courbe du moment exercé par le ressort. La figure x illustre les différentes étapes de cette réflexion.

II) Modélisation par ressort linéaire à déformation rectiligne (modèle physico-anatomique)

a) Conventions (Fig. 4) : Une masse M est suspendue à une tige rigide de longueur l articulée à la base au point C. Une des extrémités d'un ressort rectiligne est attachée au point B, l'autre au point A. Pour fixer les idées et procéder aux simplifications mathématiques : le ressort représente le triceps sural, A et B étant les points d'insertion du muscle (i.e. au calcanéum et au creux poplité) et c sa longueur. a représente la distance entre le creux poplité et l'axe de rotation tibiaux-tarsienne, b la distance entre C et A. Supposons que  $a = 50 \text{ Cm}$ ,  $b = 5 \text{ Cm}$ . Toute déviation de  $\alpha$  par rapport à la verticale provoque un couple de chute de moment :  $M_{(g)} = Mgl \sin\alpha$ . Le ressort développe une force T dirigée en BA, proportionnelle à son élongation  $c-c_0$  et sa raideur k :  $T = k(c-c_0)$  ;  $c_0$  est la longueur du ressort pour  $\alpha = 0$ .

La composante orthogonale à BC de cette force, au point B est  $T\sin\beta$ , elle développe un moment anti-gravitaire :  $M_{(T)} = aT\sin\beta$ . Cherchons à exprimer ce moment en fonction de  $\alpha$ . Soit (1), l'expression générale de la dynamique du système sans frottements.

$Mgl \sin \alpha - aT \sin \beta = I\ddot{\alpha}$  (1) :  $I = Ml^2$  ; moment d'inertie.  $\ddot{\alpha}$  ; accélération angulaire.

A l'équilibre,  $\ddot{\alpha}$  est nulle et l'égalité des moments M est réalisée (2)

$$Mgl \sin \alpha - aT \sin \beta = 0 \quad (2) \Rightarrow M_{(g)} = M_{(T)}$$

$M_{(T)} = aT \sin \beta = ak(c - c_0) \sin \beta$ . Exprimons la longueur du ressort c :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) : \text{Relation d'Al Kashi dans un triangle quelconque}$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \sin \alpha = a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2b}{a} \sin \alpha\right) \text{ or } \frac{b^2}{a^2} \text{ est } \ll 1$$

$c \approx a\sqrt{1 + \frac{2b}{a}\sin\alpha} \approx a(1 + \frac{b}{a}\sin\alpha)$  : (car  $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  au 1<sup>ier</sup> ordre , or  $\frac{2b}{a}\sin\alpha \ll 1$  pour  $\alpha$  petit)

or  $c_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$  ; pour simplifier posons  $c_0 \approx a$ . Alors :

$c - c_0 \approx a(1 + \frac{b}{a}\sin\alpha) - a = b\sin\alpha$  il vient :

$M_{(T)} = akb\sin\alpha\sin\beta$ . Il ne reste plus qu'à exprimer le terme  $\sin\beta$  en fonction de

$\alpha$ .  $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{c} = \frac{\cos\alpha}{c} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b\cos\alpha}{c}$  (loi des sinus dans un triangle quelconque)

$$\Rightarrow M_{(T)} = \frac{kb^2 \sin\alpha \cos\alpha}{c} = \frac{kb^2 \sin\alpha \cos\alpha}{a(1 + \frac{b}{a}\sin\alpha)} = \frac{kb^2 \sin 2\alpha}{2a(1 + \frac{b}{a}\sin\alpha)}$$

$$\Rightarrow M_{(T)} \approx \frac{kb^2}{2a} \sin 2\alpha$$

Cette relation exprime que le moment exercé par le ressort et qui n'est pas constant, varie en sinus  $2\alpha$  (Fig. 4). Ce moment est nul pour  $\alpha = 0$  et pour  $\alpha = 90^\circ$ , il passe par un maximum pour  $\alpha = 45^\circ$ . Cet angle  $\alpha$  est l'ouverture optimale. Intuitivement, il est facile et logique de comprendre que lorsque les segments  $a$  et  $b$  sont alignés (ouverture totale de l'angle), le ressort n'a plus aucun effet. Pour des raisons de clarté nous avons supposé que l'articulation du pendule était à la base, cette simplification nous a permis d'avoir l'allure générale de la courbe du moment en fonction de l'angle d'inclinaison. Cette allure est la même pour une modélisation qui colle mieux à la réalité (Fig. 6) avec toutefois un angle optimal  $< 45^\circ$ .

Soit  $d$  : la hauteur au sol de l'axe maléolaire et  $e$ , la distance projetée au sol entre l'axe maléolaire et le talon (point d'insertion du tendon d'Achille),  $\theta$  est l'angle entre les droites  $a$  et  $b$  et  $\theta_0$ , cet angle (au repos) quand  $\alpha$  est nul. Alors :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \text{ et } c_0^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta_0 \text{ (carré de la longueur au repos)}$$

$$b = \sqrt{d^2 + e^2} \quad (\text{Pythagore}), \quad \gamma = \arctg \frac{e}{d}, \quad \theta_0 = \pi - \gamma$$

$\theta = \theta_0 + \alpha$ . Le moment de la force exercé par le ressort s'exprime alors en fonction des mesures anatomiques ( $a, d, e$ ) et de l'inclinaison  $\alpha$  :

$$M_{(T)} = aT \sin\beta = ak(c - c_0)\sin\beta = ak(c - c_0)\frac{b}{c}\cos\alpha$$

Une simulation sur ordinateur avec :  $a = 40$  cm,  $e = 4$  cm,  $d = 8$  cm. Sans simplification donne les résultats illustrés figure 7. Ce modèle est plus réaliste mais ne convient pas au sens de la stabilité intrinsèque sauf pour  $\alpha = 0$ . Pour parvenir à ce que la courbe du moment de rappel coupe celle de la gravité il

faudrait que la force musculaire de rappel puisse se développer à partir d'un « offset », (FELDMAN) ou bien que la caractéristique Force Élongation du triceps sural soit exponentielle. Simulation figure 8

## Bibliographie

**J Neurophysiol. 1999 Sep;82(3):1622-6.**

**Can muscle stiffness alone stabilize upright standing?**

**Morasso PG, Schieppati M.**

Department of Informatics, Systems, Telecommunication, University of Genova, I-16145 Genova, Italy.

**Motor Control. 2004 Jul;8(3):292-311**

**The sway-density curve and the underlying postural stabilization process.**

**Jacono M, Casadio M, Morasso PG, Sanguineti V.**

Center of Bioengineering, Hospital La Colletta, Arenzano, Italy

**Med Biol Eng Comput. 2005 Jan;43(1):107-14**

**Human standing posture control system depending on adopted strategies.**

**Fujisawa N, Masuda T, Inaoka Y, Fukuoka H, Ishida A, Minamitani H.**

Graduate School of Science & Technology, Keio University, Yokohama, Japan.

Motor Control. 2005 Apr;9(2):180-96. Links

Speed-accuracy trade-off in voluntary postural movements.

Duarte M, Freitas SM.

Laboratory of Biophysics, Escola de Educacao Fisica e Esporte, Universidade de Sao Paulo, Brazil.

**Measurement of the visual contribution to postural steadiness from the COP movement: methodology and reliability.**

**Cornilleau-Pérès V, Shabana N, Droulez J, Goh JC, Lee GS, Chew PT.**

Labo. de Neurosciences Fonctionnelles et Pathologies, FRE2726, University Lille 2, France.

**Body sway during quiet standing: is it the residual chattering of an intermittent stabilization process?**

**Bottaro A, Casadio M, Morasso PG, Sanguineti V.**

NeuroLab, Department of Informatics, Systems and Telecommunications, University of Genova, Via Opera Pia 13, 16145 Genova, Italy.

**J Neurophysiol. 2006 Mar;95(3):1410-8. Epub 2005 Sep 28.**

**Slow dynamics of postural sway are in the feedback loop.**

**Kiemel T, Oie KS, Jeka JJ.**

Dept. of Kinesiology, University of Maryland, College Park, MD 20742, USA

**Feedback equilibrium control during human standing.**

**Alexandrov AV, Frolov AA, Horak FB, Carlson-Kuhta P, Park S.**

Institute of Higher Nervous Activity and Neurophysiology, Russian Academy of Science, Butlerova 5a, Moscow 117485, Russia.

**Exp Brain Res. 2006 May;171(2):231-50. Epub 2005 Nov 24.**

**Multisensory control of human upright stance.**

**Maurer C, Mergner T, Peterka RJ.**

Neurological University Clinic, Neurozentrum Breisacher Str. 64, 79106, Freiburg, Germany.

**Controlling balance during quiet standing: proportional and derivative controller generates preceding motor command to body sway position observed in experiments.**

**Masani K, Vette AH, Popovic MR.**

Department of Life Sciences, Graduate School of Arts and Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo 153-8902, Japan

Clin Biomech (Bristol, Avon). 2006 May;21(4):427-34. Epub 2006 Jan 27

**Force-plate based computation of ankle and hip strategies from double-inverted pendulum model.**

**Colobert B, Crétual A, Allard P, Delamarche P.**

Laboratoire de Physiologie et Biomécanique de l'Exercice Musculaire, UFR-APS CS 24 414, Rennes, France.

**Gait Posture. 2007 Feb;25(2):166-71. Epub 2006 Apr 19.**

**Generalizability of center of pressure measures of quiet standing.**

**Doyle RJ, Hsiao-Wecksler ET, Ragan BG, Rosengren KS.**

Department of Kinesiology, University of Illinois at Urbana-Champaign, IL 61801, United States.

**J Neurophysiol. 2007 Aug;98(2):730-43. Epub 2007 Apr 25.**

**Postural responses evoked by platform perturbations are dominated by continuous feedback.**

van der Kooij H, de Vlugt E.

**J Physiol. 2006 Nov 15;577(Pt 1):417-32. Epub 2006 Sep 14.**

**The frequency of human, manual adjustments in balancing an inverted pendulum is constrained by intrinsic physiological factors.**

Loram ID, Gawthrop PJ, Lakie M. Institute for Biophysical and Clinical Research into Human Movement, Manchester Metropolitan University, Alsager ST7 2HL, UK.

**On use of a nominal internal model to detect a loss of balance in a maximal forward reach.**

Ahmed AA, Ashton-Miller JA.

Biomechanics Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering, University of Michigan, 3216 G. G. Brown, 2350 Hayward St., Ann Arbor, MI 48109-2125, USA.

**Modelling stabilograms with hidden Markov models.**

Rasku J, Juhola M, Tossavainen T, Pyykkö I, Toppila E.

Department of Computer Sciences, 33014 University of Tampere, Tampere, Finland.

**IEEE Trans Biomed Eng. 2008 May;55(5):1612-9**

**Design of perturbation signals for the estimation of proprioceptive reflexes.**

Schouten AC, Vlugt ED, van der Helm FC.

**J Neurophysiol. 2008 Feb;99(2):1032-8. Epub 2007 Dec 19**

**A feedback model reproduces muscle activity during human postural responses to support-surface translations.**

Welch TD, Ting LH.

The Wallace H. Coulter Department of Biomedical Engineering, Georgia Institute of Technology and Emory University, Atlanta, GA 30332-0535, USA.

**Hum Mov Sci. 2007 Dec;26(6):808-23. Epub 2007 Oct 10.**

**Control of velocity and position in single joint movements.**

Mutha PK, Sainburg RL.

Department of Kinesiology, 29, Recreation Building, The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA.

**Exp Brain Res. 2007 Aug;181(2):347-58. Epub 2007 Mar 21**

**Inverse relations in the patterns of muscle and center of pressure dynamics during standing still and movement postures.**

Morrison S, Hong SL, Newell KM.

School of Physiotherapy and Exercise Science, Gold Coast Campus Griffith University, PMB 50 Gold Coast Mail Centre, Gold Coast, QLD, 9726, Australia.

**J Electromyogr Kinesiol. 2007 Dec;17(6):739-46. Epub 2006 Dec 4.**

**Anticipation mechanism in body sway control and effect of muscle fatigue.**

Mello RG, Oliveira LF, Nadal J.

Biomedical Engineering Program, COPPE, Federal University of Rio de Janeiro, PO Box 68510, 21941-972, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

**Controlling balance during quiet standing: proportional and derivative controller generates preceding motor command to body sway position observed in experiments.**

Masani K, Vette AH, Popovic MR.

Department of Life Sciences, Graduate School of Arts and Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo 153-8902, Japan

**Dynamic regulation of sensorimotor integration in human postural control.**

Peterka RJ, Loughlin PJ.

Neurological Sciences Institute, Oregon Health & Science University, Portland, Oregon 97006, USA.

**J Neurophysiol. 2004 Oct;92(4):2368-79. Epub 2004 May 12.**

**Controlling human upright posture: velocity information is more accurate than position or acceleration.**

Jeka J, Kiemel T, Creath R, Horak F, Peterka R.

Program in Neuroscience & Cognitive Science, University of Maryland, College Park, MD 20742-2611, USA.

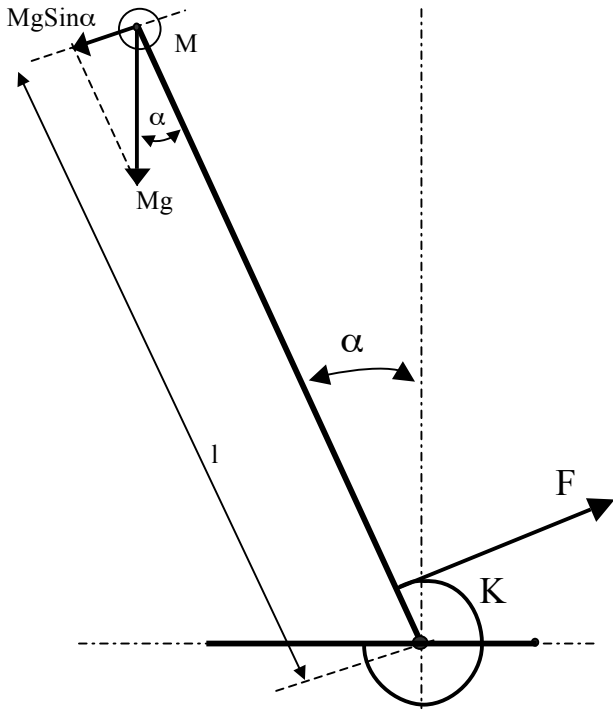


Fig. 1

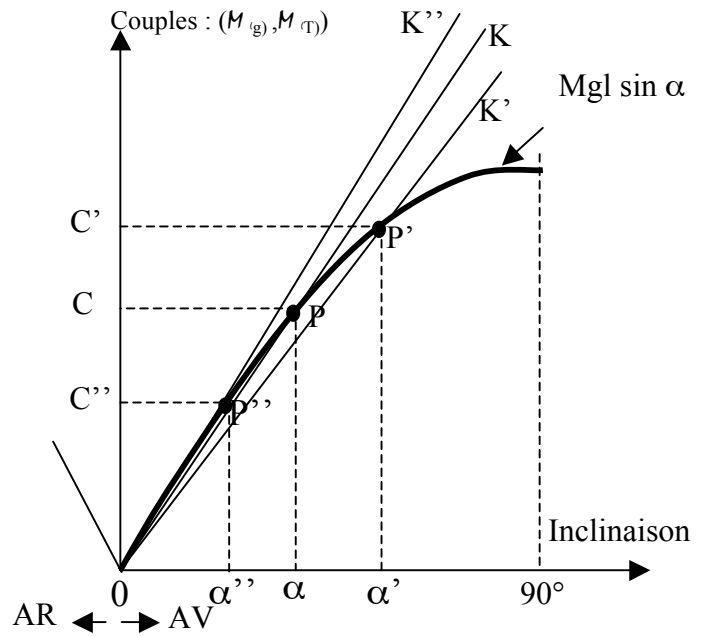


Fig. 2

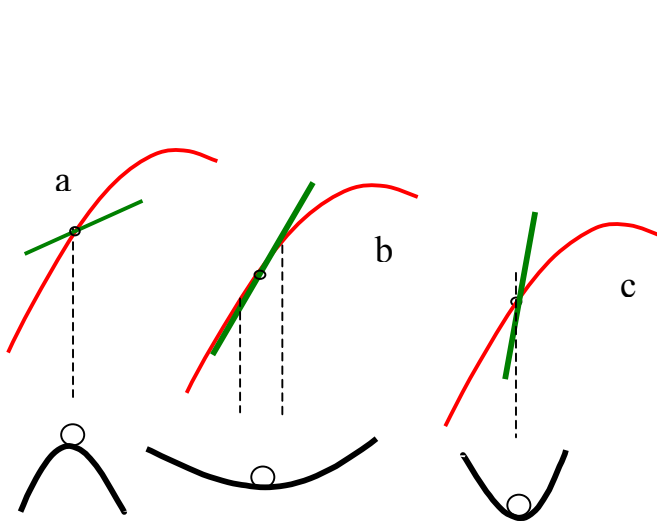


Fig. 3. :  
 3 configurations possibles d'intersection des courbes de « gravité et de rappel élastique ». et une analogie bille-cuvette pour symboliser l'équilibre.  
 a : point d'équilibre instable  
 b : point d'équilibre stable mais imprécis

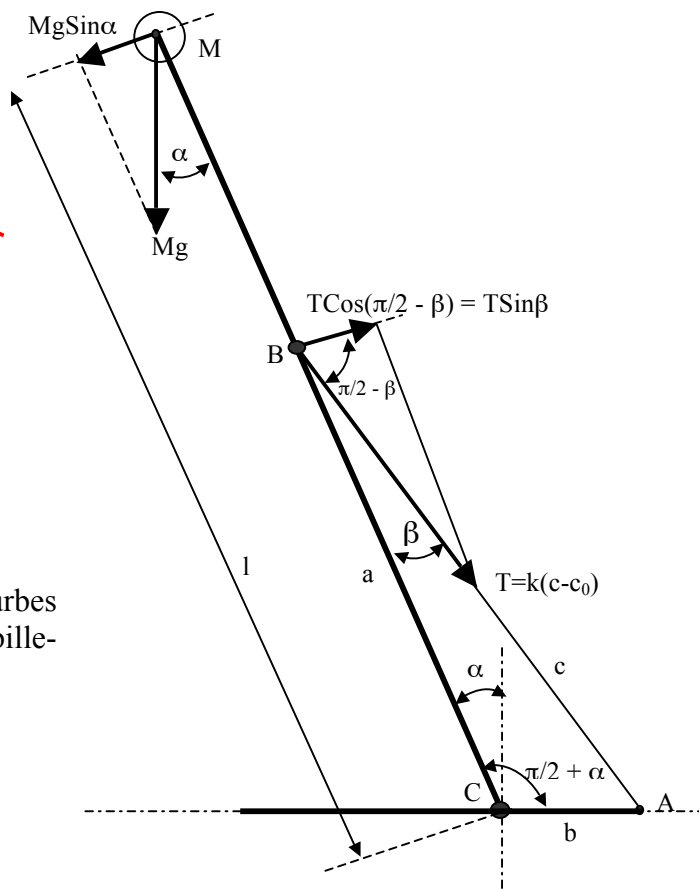


Fig. 4

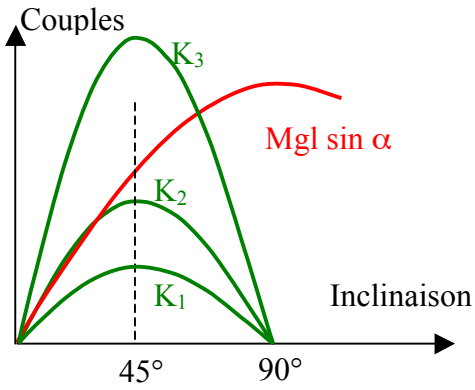


Fig. 5

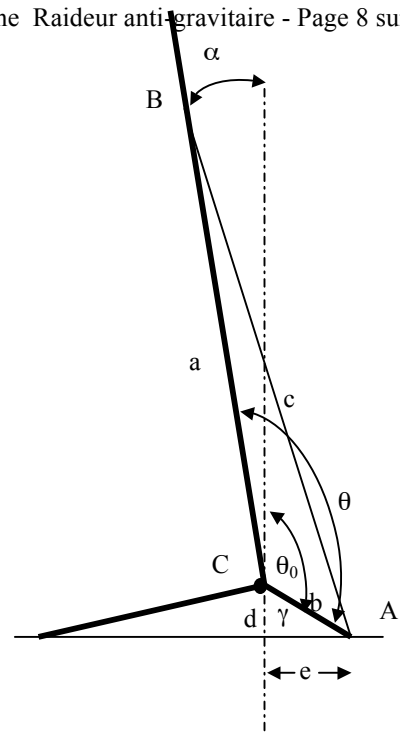


Fig. 6

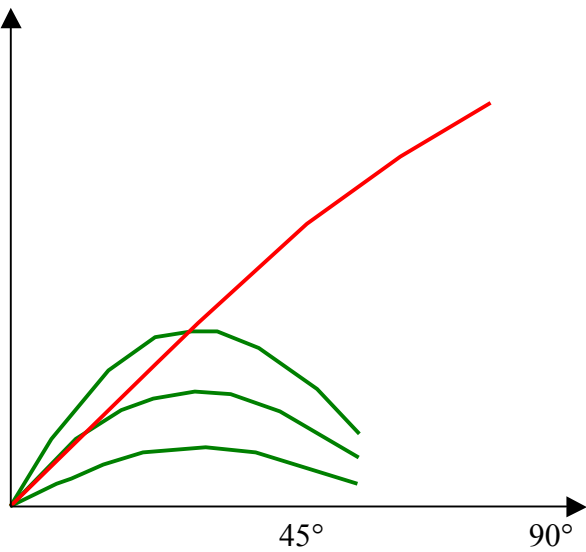


Fig. 7

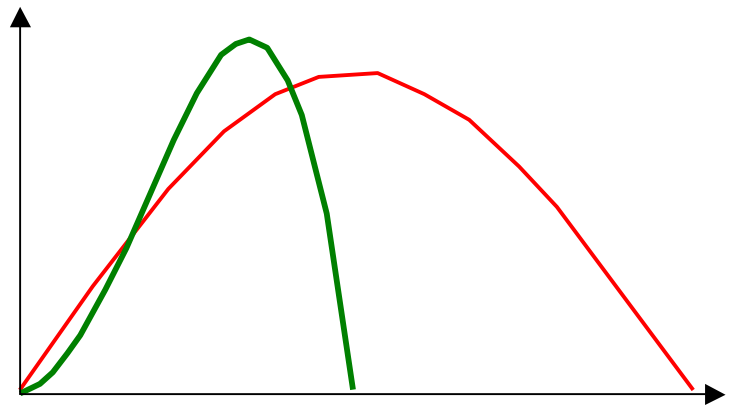


Fig. 8 .

La raideur musculaire peut s'exprimer par une relation de la forme :  $R(\alpha) = a_1 e^{a_2 \alpha} - a_3$  et  $M_{(\tau)} =$

$$aT \sin \beta = aR(\alpha)(c - c_0) \sin \beta = aR(\alpha)(c - c_0) \frac{b}{c} \cos \alpha$$

La condition de stabilité intrinsèque peut être réalisée pour un angle donné en réglant les paramètres  $a_1$   $a_2$   $a_3$